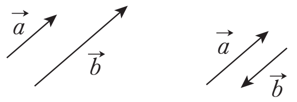
PART4 ベクトルの平行，ベクトルの分解

要点① ベクトルの平行

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ において，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の向きが同じ，または反対であるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は「　　」であるといい，「$\vec{a}$ 　 $\vec{b}$」と書く。

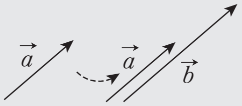


ベクトルの実数倍の定義から，次のことが成り立つ。

ベクトルの平行

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき

$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}\iff\vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 k が存在する



大きさが1のベクトルを「　　　　　　」という。

例 $|\vec{a}|=3$ のとき，$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルは 　$\vec{a}$ と 　　$\vec{a}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルは $\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ と $-\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ である。

要点② ベクトルの分解

一般に，平面上の2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，次のことが成り立つ。

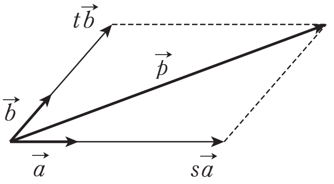
ベクトルの分解

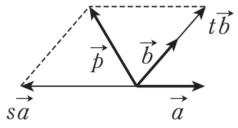
2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないとする。

このとき，任意のベクトル $\vec{p}$ は，実数 s，t を用いて

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$$

の形で，ただ1通りに表すことができる。

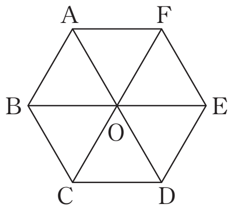




$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は「1 次独立」であるという。

4 正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とし，対角線 BE と対角線 FC の交点を O とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{FC}$　(2) $\overrightarrow{AO}$　(3) $\overrightarrow{DF}$



Point Pickup

ベクトルの平行

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{p}\neq\vec{0}$ のとき

$$\vec{a}\parallel\vec{p} \iff \vec{p}=k\vec{a} \text{ となる実数 } k \text{ が存在する}$$

これにより，与えられたベクトル $\vec{a}$ と平行なベクトル $\vec{p}$ を，$\vec{a}$ を用いて表すことができる。

ベクトルの分解

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないとき($\vec{a}$ と $\vec{b}$ が 1 次独立であるとき)，任意のベクトル $\vec{p}$ は，実数 s，t を用いて

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$$

の形で，ただ 1 通りに表すことができる。

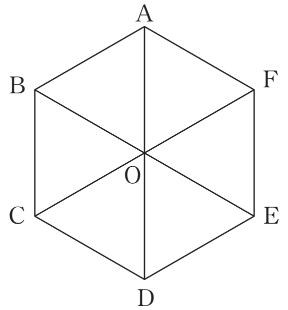
2 つのベクトルの和や差を用いて

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}，\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

のようにベクトルを「分割」し，$\vec{a}$，$\vec{b}$ または，これらに平行なベクトルで表すことで，s，t を求めることができる。

第 1 講 PART4 確認問題

正六角形 ABCDEF において，
$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とし，対角線BE と対角線 FC の交点を O とする。
次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。



1 $\overrightarrow{CF}=$ ア

① $\vec{a}+\vec{b}$　② $\vec{a}-\vec{b}$　③ $-\vec{a}+\vec{b}$
④ $2\vec{a}$　⑤ $-2\vec{a}$　⑥ $2\vec{a}+2\vec{b}$

2 $\overrightarrow{AD}=$ イ

① $\vec{a}+\vec{b}$　② $\vec{a}-\vec{b}$　③ $-\vec{a}+\vec{b}$
④ $2\vec{a}$　⑤ $-2\vec{a}$　⑥ $2\vec{a}+2\vec{b}$

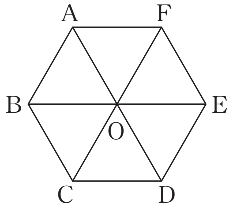
3 $\overrightarrow{CE}=$ ウ

① $\vec{a}+\vec{b}$　② $\vec{a}-\vec{b}$　③ $-\vec{a}+\vec{b}$
④ $2\vec{a}$　⑤ $-2\vec{a}$　⑥ $2\vec{a}+2\vec{b}$

PART4 ベクトルの平行，ベクトルの分解

4 正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とし，対角線 BE と対角線 FC の交点を O とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{FC}$　(2) $\overrightarrow{AO}$　(3) $\overrightarrow{DF}$



[解答]

(1) $\overrightarrow{FC}=2\overrightarrow{FO}=2\vec{a}$

(2) $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\vec{a}+\vec{b}$

(3) $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}=-\vec{b}+(-2\vec{a})=-2\vec{a}-\vec{b}$

(別解)

$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}=\vec{b}-2\overrightarrow{AO}=\vec{b}-2(\vec{a}+\vec{b})=-2\vec{a}-\vec{b}$

第 1 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：⑤

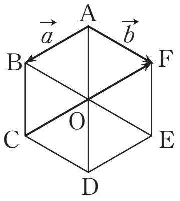
[解説]

四角形 ABCO は平行四辺形であるから

$$\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}=-\vec{a}$$

よって

$$\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{CO} \quad \text{[A]}$$
$$=\boldsymbol{-2\vec{a}}$$



> [A]　ベクトルの平行
> $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{p}\neq\vec{0}$ のとき
> $\vec{a}\parallel\vec{p} \iff \vec{p}=k\vec{a}$ となる実数 k が存在する

2

[正解] イ：⑥

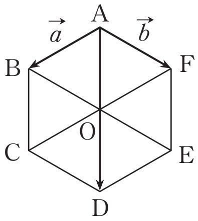
[解説]

四角形 ABOF は平行四辺形であるから

$$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AF}=\vec{b}$$

よって

$$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}$$
$$=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}) \quad \text{[B]}$$
$$=2(\vec{a}+\vec{b})$$
$$=\boldsymbol{2\vec{a}+2\vec{b}}$$



> [B]　ベクトルの分解
> $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないとき，任意のベクトル $\vec{p}$ は，実数 s, t を用いて
> $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$
> の形で，ただ1通りに表すことができる。

3 [正解] ウ：③

[解説]

四角形 ABCO は平行四辺形であるから

$$\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}=-\vec{a}$$

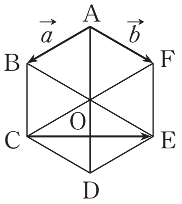
四角形 AOEF は平行四辺形であるから

$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{AF}=\vec{b}$$

よって

$$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OE}$$ [C]

$$=-\vec{a}+\vec{b}$$



(別解)

$$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OC}$$

$$=\vec{b}-\vec{a}$$

$$=-\vec{a}+\vec{b}$$

> [C]　ベクトルの分解
> $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないとき，任意のベクトル $\vec{p}$ は，実数 s, t を用いて
> $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$
> の形で，ただ1通りに表すことができる。